

ISSN 2518-170X (Online),
ISSN 2224-5278 (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ГЕОЛОГИЯ ЖӘНЕ ТЕХНИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
СЕРИЯСЫ



СЕРИЯ
ГЕОЛОГИИ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК



SERIES
OF GEOLOGY AND TECHNICAL SCIENCES

1 (421)

ҚАҢТАР – АҚПАН 2017 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2017 г.
JANUARY – FEBRUARY 2017

ЖУРНАЛ 1940 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ С 1940 г.
THE JOURNAL WAS FOUNDED IN 1940.

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы

э. ғ. д., профессор, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі

И.К. Бейсембетов

Бас редакторының орынбасары

Жолтаев Г.Ж. проф., геол.-мин. ғ. докторы

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Абаканов Т.Д. проф. (Қазақстан)
Абишева З.С. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Алиев Т. проф., академик (Әзірбайжан)
Бакиров А.Б. проф., (Қырғыстан)
Беспәев Х.А. проф. (Қазақстан)
Бишимбаев В.К. проф., академик (Қазақстан)
Буктуков Н.С. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Бұлат А.Ф. проф., академик (Украина)
Ганиев И.Н. проф., академик (Тәжікстан)
Грэвис Р.М. проф. (АҚШ)
Ерғалиев Г.Х. проф., академик (Қазақстан)
Жуков Н.М. проф. (Қазақстан)
Кенжалиев Б.К. проф. (Қазақстан)
Қожахметов С.М. проф., академик (Қазақстан)
Конторович А.Э. проф., академик (Ресей)
Курскеев А.К. проф., академик (Қазақстан)
Курчавов А.М. проф., (Ресей)
Медеу А.Р. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Мұхамеджанов М.А. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Нигматова С.А. проф. (Қазақстан)
Оздоев С.М. проф., академик (Қазақстан)
Постолатий В. проф., академик (Молдова)
Ракишев Б.Р. проф., академик (Қазақстан)
Сейтов Н.С. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Сейтмуратова Э.Ю. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Степанец В.Г. проф., (Германия)
Хамфери Дж.Д. проф. (АҚШ)
Штейнер М. проф. (Германия)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Геология мен техникалық ғылымдар сериясы».

ISSN 2518-170X (Online),

ISSN 2224-5278 (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 30.04.2010 ж. берілген №10892-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, <http://nauka-nanrk.kz/geology-technical.kz>

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Редакцияның Қазақстан, 050010, Алматы қ., Қабанбай батыра көш., 69а.

мекенжайы: Қ. И. Сәтбаев атындағы геология ғылымдар институты, 334 бөлме. Тел.: 291-59-38.

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Г л а в н ы й р е д а к т о р

д. э. н., профессор, член-корреспондент НАН РК

И. К. Бейсембетов

Заместитель главного редактора

Жолтаев Г.Ж. проф., доктор геол.-мин. наук

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

Абаканов Т.Д. проф. (Казахстан)
Абишева З.С. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Алиев Т. проф., академик (Азербайджан)
Бакиров А.Б. проф., (Кыргызстан)
Беспаяев Х.А. проф. (Казахстан)
Бишимбаев В.К. проф., академик (Казахстан)
Буктуков Н.С. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Булат А.Ф. проф., академик (Украина)
Ганиев И.Н. проф., академик (Таджикистан)
Грэвис Р.М. проф. (США)
Ергалиев Г.Х. проф., академик (Казахстан)
Жуков Н.М. проф. (Казахстан)
Кенжалиев Б.К. проф. (Казахстан)
Кожаметов С.М. проф., академик (Казахстан)
Конторович А.Э. проф., академик (Россия)
Курскеев А.К. проф., академик (Казахстан)
Курчавов А.М. проф., (Россия)
Медеу А.Р. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Мухамеджанов М.А. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Нигматова С.А. проф. (Казахстан)
Оздоев С.М. проф., академик (Казахстан)
Постолатий В. проф., академик (Молдова)
Ракишев Б.Р. проф., академик (Казахстан)
Сейтов Н.С. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Сейтмуратова Э.Ю. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Степанец В.Г. проф., (Германия)
Хамфери Дж.Д. проф. (США)
Штейнер М. проф. (Германия)

«Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук».

ISSN 2518-170X (Online),

ISSN 2224-5278 (Print)

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №10892-Ж, выданное 30.04.2010 г.

Периодичность: 6 раз в год

Тираж: 300 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,

<http://наука-нанрк.kz/geology-technical.kz>

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес редакции: Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Кабанбай батыра, 69а.

Институт геологических наук им. К. И. Сатпаева, комната 334. Тел.: 291-59-38.

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75

E d i t o r i n c h i e f

doctor of Economics, professor, corresponding member of NAS RK

I. K. Beisembetov

Deputy editor in chief

Zholtayev G.Zh. prof., dr. geol-min. sc.

E d i t o r i a l b o a r d:

Abakanov T.D. prof. (Kazakhstan)
Abisheva Z.S. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Aliyev T. prof., academician (Azerbaijan)
Bakirov A.B. prof., (Kyrgyzstan)
Bespayev Kh.A. prof. (Kazakhstan)
Bishimbayev V.K. prof., academician (Kazakhstan)
Buktukov N.S. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Bulat A.F. prof., academician (Ukraine)
Ganiyev I.N. prof., academician (Tadjikistan)
Gravis R.M. prof. (USA)
Yergaliev G.Kh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhukov N.M. prof. (Kazakhstan)
Kenzhaliyev B.K. prof. (Kazakhstan)
Kozhakhmetov S.M. prof., academician (Kazakhstan)
Kontorovich A.Ye. prof., academician (Russia)
Kurskeyev A.K. prof., academician (Kazakhstan)
Kurchavov A.M. prof., (Russia)
Medeu A.R. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Muhamedzhanov M.A. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Nigmatova S.A. prof. (Kazakhstan)
Ozdoyev S.M. prof., academician (Kazakhstan)
Postolatii V. prof., academician (Moldova)
Rakishev B.R. prof., academician (Kazakhstan)
Seitov N.S. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Seitmuratova Ye.U. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Stepanets V.G. prof., (Germany)
Humphery G.D. prof. (USA)
Steiner M. prof. (Germany)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences.

ISSN 2518-170X (Online),

ISSN 2224-5278 (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 10892-Ж, issued 30.04.2010

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
<http://nauka-nanrk.kz/geology-technical.kz>

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Editorial address: Institute of Geological Sciences named after K.I. Satpayev
69a, Kabanbai batyr str., of. 334, Almaty, 050010, Kazakhstan, tel.: 291-59-38.

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

SERIES OF GEOLOGY AND TECHNICAL SCIENCES

ISSN 2224-5278

Volume 1, Number 421 (2017), 217 – 225

A. Umbetkulova, L. Khajiyeva

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: aliya1988kz@mail.ru

**ANALYSIS OF DRILL STRING NONLINEAR VIBRATIONS
WITH ITS OWN WEIGHT**

Abstract. The dynamics of a rotating shallow drill strings applied in oil and gas extractive industry is investigated. Transverse vibrations caused by the action of variable compressive load, twisting moment and the influence of drill string own weight distributed along the length of the column are considered. Modeling the drill string dynamics, geometric nonlinearity due to removing the restriction on the value of drill string deformation is allowed. Initial curvature of the drill string as a complicating factor is taken into account. Models proposed by the authors are the generalization of the known equations of drill string vibration. The numerical analysis of the nonlinear vibration model is carried out using the Bubnov-Galerkin method of separation of variables. The influence of nonlinearity and drill string own weight on its oscillation process is studied. The effectiveness of application of the nonlinear models, which leads to decrease of the drill string oscillation amplitude and to increase of the oscillation amplitude caused by the influence of drill string own weight, is confirmed. It indicates the necessity of taking into account these effects when evaluating the amplitude-frequency characteristics of the drill string. The research results are in good agreement with studies of other authors.

Keywords: drill string, nonlinear model, geometric nonlinearity, distributed own weight, transverse vibrations.

А. Б. Умбеткулова, Л. А. Хаджиева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ
С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА**

Аннотация. Исследуется динамика вращающихся бурильных колонн неглубинного бурения, применяемых в нефтегазодобывающей отрасли. Рассматриваются поперечные колебания бурильных колонн, обусловленные действием на них переменных сжимающей нагрузки, крутящего момента, а также влиянием собственного веса колонны, распределенного по всей ее длине. При моделировании динамики бурильных колонн допускается геометрическая нелинейность модели за счет снятия ограничений на величины деформаций бурильных колонн. Учтены осложняющие факторы в виде начальной кривизны колонны. Предложенные авторами модели являются обобщением известных уравнений колебаний бурильных колонн. Численный анализ нелинейной модели колебаний проводится с применением метода разделения переменных Бубнова-Галеркина. Установлено влияние нелинейности и собственного веса буровой колонны на ее колебательный процесс. Подтверждается эффективность нелинейности модели, ведущей к уменьшению амплитуд колебаний бурильных колонн, а также увеличение амплитуд их колебаний за счет влияния собственного веса колонны. Полученные результаты свидетельствуют о необходимости их учета при оценке амплитудно-частотных характеристик буровой колонны. Результаты исследований хорошо согласуются с исследованиями других авторов.

Ключевые слова: бурильная колонна, нелинейная модель, геометрическая нелинейность, распределенный собственный вес, поперечные колебания.

Введение. Большинство работ по исследованию динамики бурильных колонн направлено на моделирование и анализ вибраций колонн, вызывающих потерю устойчивости движения бурового оборудования и нарушение их прочностных свойств. Потеря устойчивости прямолинейной формы бурильных колонн ведет к искривлению скважин, приводящих их к негодности. Поэтому исследование по моделированию динамики буровых штанг с учетом их деформационных свойств, с учетом осложняющих факторов и влияния внешних возмущающих сил представляют научный и практический интерес. Одним из распространенных допущений является наложение ограничений на величины деформаций бурильных колонн при их моделировании, то есть допущение их малости, что ведет к линеаризации модели. Область применения линейных моделей ограничена. Линейные модели отвечают весьма частным случаям и отражают реальное поведение конструкций лишь до определенного уровня внешних воздействий. Они существенно сужают представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая штанга-скважина и адекватность их описания, то есть наличие нелинейных колебаний упругих элементов.

В настоящее время работы многих современных авторов посвящены моделированию нелинейных динамических систем. Интерес к изучению нелинейных волновых процессов связан с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций нелинейных режимов. Авторы работ отмечают необходимость более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния стержневых систем, учитывающих геометрическую и физическую нелинейностей. Среди последних работ по моделированию нелинейной динамики стержневых элементов можно отметить работы [1], где приведен анализ современного состояния проблемы, работы [2-4] и др. В работе [2] изучена модель изгибных колебаний балки Тимошенко с учетом геометрической и физической нелинейностей, которая в предположении малости углов сдвига сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения. Установлено, что нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов.

В работе [3] проводится сравнительный анализ линейных и нелинейных изгибных, продольных и крутильных колебаний балки Тимошенко, отмечается, что ранее нелинейному динамическому анализу механических конструкций не было уделено достаточного внимания. Нелинейность модели в данной работе обусловлена допущением больших деформаций. С точки зрения нелинейного анализа, установлено, что модель шарнирно-опертой балки Тимошенко с учетом кубической нелинейности совершает меньшие колебания, чем для линейной модели, такие же результаты получены и в [4]. Также установлено, что с увеличением внешних нагрузок, действующих на систему, увеличивается и разница между амплитудами линейных и нелинейных колебаний. Отмечается, что линейный анализ приводит к заранее прогнозируемому результату, в то время как при нелинейном анализе такое поведение не наблюдается.

В работе [5] анализируется выпучивание бурильной колонны и обсадных труб, играющих важную механическую роль в бурении и добыче нефти. Рассмотрены линейные и нелинейные математические модели, найдены критические силы для спирального и синусоидального изгиба в скважинах.

Следующий класс задач не ограничивается действием на стержень лишь внешних поверхностных нагрузок, а учитывают и действие нагрузки, распределенной по объему стержня, – его собственного веса. Возникает необходимость анализа влияния собственного веса на напряженно-деформированное состояние буровой штанги и ее перемещения в процессе бурения.

Авторами работы [6] рассматриваются нелинейные колебания балки Тимошенко с учетом ее собственного веса. Акцент делается на геометрической нелинейности, вызванной большими искривлениями и нелинейным растяжением срединной линии балки Тимошенко, под действием ее собственного веса в рамках теории конечных деформаций. Внешнюю нагрузку, действующую на балку, рассматривают как линейную функцию, а нагрузку, вызванную ее собственным весом, берут в виде постоянной величины [7]. В работе [8] также отмечается необходимость учета собственного веса балки при анализе ее колебаний и устойчивости. В некоторых случаях нагрузка от собственного веса балки превосходит величину внешней нагрузки, действующей на нее, что немаловажно для бурильных колонн глубинного бурения. Пренебрежение собственным весом балки при изучении ее динамического поведения может привести к большим погрешностям в расчетах. Поэтому,

рассматривая большие деформации, необходимо учитывать собственный вес балки, который, как и в предыдущей работе, был принят постоянной величины. Автором установлено, что с уменьшением длины балки уменьшается влияние ее собственного веса на колебания, а для балок малой длины это влияние и вовсе несущественно. В работах [9], [10] анализируется влияние собственного веса балки Эйлера-Бернулли на ее продольные и изгибные перемещения.

В отличие от работ [6]-[10], где нагрузка от собственного веса была рассмотрена как постоянная величина, Hijmissen J.W. и W.T. van Horssen [11], [12] рассматривали собственный вес балки Тимошенко распределенным по всей ее длине. Показано, что силой сжатия, обусловленной гравитацией и собственным весом балки, нельзя пренебрегать. Установлено, что учет собственного веса в модели колебаний балки Тимошенко приводит к увеличению частот колебаний, а влияние силы тяжести уменьшается с увеличением числа мод при моделировании методом возмущений. Автор работы [13], изучая динамику вертикального стержня, также принимает учет распределенного по длине собственного веса балки, так как сила тяжести в данном случае будет доминирующей нагрузкой на балку. В [14] изучено влияние деформации сдвига, инерции вращения и силы тяжести, обусловленной собственным весом балки, на ее изгибные колебания. Собственные частоты и формы колебаний получены для классической теории балок типа Тимошенко. Их анализ проведен методом Галеркина. Установлено, что для низших мод частоты колебаний балки значительно увеличиваются с увеличением силы тяжести; влияние собственного веса на собственные частоты колебаний уменьшается с увеличением числа мод. Также подтверждается увеличение частот колебаний при учете собственного веса балки. Авторами [15] изучено влияние собственного веса колонны на ее колебания и потерю устойчивости. Было показано, что колебательный процесс модели с учетом собственного веса колонны отличается от колебаний без его учета, что подтверждает необходимость учета силы тяжести. Все это говорит о важности учета собственного веса балок и стержней при изучении их динамики и их широком прикладном значении.

Целью данной работы является нелинейный анализ влияния собственного веса буровой колонны, используемой в нефтегазодобывающей отрасли, на ее поперечные колебания. Математическая модель колебаний колонны учитывает геометрическую нелинейность. Буровая колонна рассматривается в виде изотропного упругого стержня длиной l , имеющей начальные несовершенства, представленных в виде поперечных прогибов u_0, v_0 .

Нелинейная математическая модель колонны с учетом собственного веса. Для изучения динамики колебания буровой колонны с учетом распределенного по его длине собственного веса необходимо к величине внешней продольной нагрузки прибавить нагрузку, обусловленную собственным весом колонны:

$$N(z, t) = \bar{N}(t) + P(z), \quad (1)$$

где $P(z)$ – собственный вес буровой колонны, зависящий от пространственной координаты z , так как нагрузка от веса колонны неравномерно распределена по ее длине и является различной по величине для каждого поперечного сечения. Максимального значения вес достигает на забое ($z = l$), и это сечение является наиболее опасным.

$\bar{N}(t)$ – продольная нагрузка, передаваемая от буровой установки, которая, в свою очередь, делится на постоянную и переменную во времени составляющие:

$$\bar{N}(t) = N_0 + N_t \cos(\bar{\omega}t). \quad (2)$$

Здесь N_0 – продольная сила, обусловленная постоянной во времени силой сжатия; $\cos(\bar{\omega}t)$ – периодическая функция времени, характеризующая режим нагружения; N_t – определяет вклад переменной составляющей.

Если буровая штанга имеет постоянное поперечное сечение, то для определенного сечения, находящегося на расстоянии z от верхнего конца штанги, из условия равновесия отсеченной части при учете собственного веса, $P(z)$ – линейная функция [11]–[15]:

$$P(z) = \rho Agz, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала буровой штанги, A – площадь ее поперечного сечения, g – ускорение свободного падения, z – расстояние от верхнего конца штанги.

Координату z , характеризующую расстояние от верхнего конца штанги до рассматриваемого сечения, можно представить в форме $z = z_k \cdot l$, где l – длина буровой штанги, z_k – параметр, отвечающий за расположение сечения по длине и принимающий следующие значения: $0 \leq z_k \leq 1$.

Таким образом, величина общей нагрузки, действующей на систему, равна:

$$N(z, t) = N_0 + N_t \cos(\bar{\omega}t) + \rho A g z_k l, \quad (4)$$

При анализе статической устойчивости бурильной колонны, подборе сечения колонны с целью расчета на прочность из формулы (4) следует, что учет влияния собственного веса приводит к понижению критической нагрузки на величину собственного веса. Лишь при малой длине стержня это понижение оказывается несущественным и влияние собственного веса может не учитываться. Поэтому при рассмотрении буровой штанги большой длины необходимо учитывать собственный вес конструкции.

Нелинейная динамическая модель, описывающая поперечные колебания бурильной колонны в плоскостях Oxz и Oyz , вращающейся с частотой ω , под действием продольной сжимающей силы $N(z, t)$ и крутящего момента $M(t)$ с учетом начального прогиба u_0, v_0 , описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(z, t) \frac{\partial(u + u_0)}{\partial z} \right) + M(t) \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \\ - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{3EA}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho A \omega^2 u + 2\rho A \omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(z, t) \frac{\partial(v + v_0)}{\partial z} \right) - M(t) \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \\ - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{3EA}{1-\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho A \omega^2 v - 2\rho A \omega \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Колонна считается шарнирно-опертой. Для этого случая граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u(z, t) = 0, \quad v(z, t) = 0 \quad (z = 0, z = l) \\ EI \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad EI \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = l). \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(z, t) = v(z, t) \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = C_1, \quad \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = C_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Для получения решения модели (5) – (7) применяется метод Бубнова-Галеркина, который, как было показано в [16], позволяет успешно анализировать поведение бурильных колонн, применяемых для добычи нефти в вертикальных и искривленных скважинах.

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина, поперечные перемещения $u(z, t), v(z, t)$ в плоскостях Oxz, Oyz и начальные прогибы $u_0(z), v_0(z)$ представляются в виде рядов:

$$\begin{aligned}
 u(z,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), & v(z,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right). \\
 u_0(z) &= \bar{u}_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), & v_0(z) &= \bar{v}_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Рассматривая первую составляющую ряда (8), получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно новых функций $\bar{u}_1(t)$ и $\bar{v}_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 a_1 \bar{u}_1''(t) + a_2 \bar{v}_1'(t) + c \bar{u}_1(t)^3 + b \bar{u}_1(t) + k \bar{u}_1(t) \cos(\omega t) + d \bar{v}_1(t)^2 \bar{u}_1(t) &= h_1 + h_2 \cos(\omega t), \\
 a_1 \bar{v}_1''(t) - a_2 \bar{u}_1'(t) + c \bar{v}_1(t)^3 + b \bar{v}_1(t) + k \bar{u}_1(t) \cos(\omega t) + d \bar{u}_1(t)^2 \bar{v}_1(t) &= h_1 + h_2 \cos(\omega t).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

где $a_1 = \rho A + \rho I \frac{\pi^2}{l^2}$, $a_2 = 2\rho A \omega$, $k = -\frac{\pi^2}{l^2} N_t$,

$$\begin{aligned}
 b &= EI \frac{\pi^4}{l^4} - \rho A g \frac{\pi^2}{l} z_k + \rho A \omega^2 - \frac{\pi^2}{l^2} N_0, \\
 c &= \frac{6EA\pi^4}{8(1-\nu)l^4}, & d &= \frac{3EA(5-6\nu)\pi^4}{8(1-\nu)l^4}, \\
 h_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} N_0 \bar{u}_0 + \frac{\pi^2}{l} \rho A g z_k \bar{u}_0, & h_2 &= \frac{\pi^2}{l^2} N_t \bar{u}_0.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Численный анализ колебаний бурильной колонны. Численное решение модели (5)-(7) проводится в универсальном пакете символьной математики Wolfram Mathematica при следующих значениях параметров бурильной колонны: модуль Юнга $E = 0.7 \times 10^5$ МПа, плотность материала $\rho = 2700$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$ (для дюралюминиевых буровых колонн), внешний диаметр штанги $D = 0.2$ м, внутренний диаметр $d = 0.12$ м, длина бурильной колонны $l = 100$ м, частота вращения $\omega = 7$ об/мин, продольная сжимающая нагрузка состоит из постоянной $N_0 = 0.1 \times 10^3$ Н и переменной составляющих $N_t = 2.1 \times 10^3$ Н.

На рисунке 1 представлены амплитуды колебаний бурильной колонны для случая ее линейного и нелинейного моделирования. При этом рассматривалось сечение $z = \frac{l}{20}$ от верхнего конца колонны. Установлено, что поперечные колебания в случае нелинейной модели имеют меньшую амплитуду и процесс является более устойчивым, нежели в линейной модели. Рассмотрено влияние собственного веса бурильной колонны на ее нелинейные поперечные колебания (рисунок 2).

Численный анализ проведен для сечения $z = \frac{3l}{4}$. Из рисунка 2 видно, что амплитуда колебаний буровой штанги с учетом ее собственного веса в несколько раз превосходит амплитуду колебаний колонны без учета собственного веса. Наряду с этим отличаются и частоты собственных колебаний. Учет силы тяжести буровой штанги приводит к увеличению частоты колебаний. Как отмечалось ранее, следует, что при моделировании колебаний бурильной колонны необходимо учитывать ее собственный вес, так как пренебрежение им приводит к большой погрешности.

Для уточнения решений и более глубокого изучения колебательного процесса рассматриваются первые три члена ряда в разложении перемещений $u(z,t)$, $v(z,t)$ в (8):

$$u(z,t) = \sum_{k=1}^3 \bar{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \quad v(z,t) = \sum_{k=1}^3 \bar{v}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right).
 \tag{11}$$

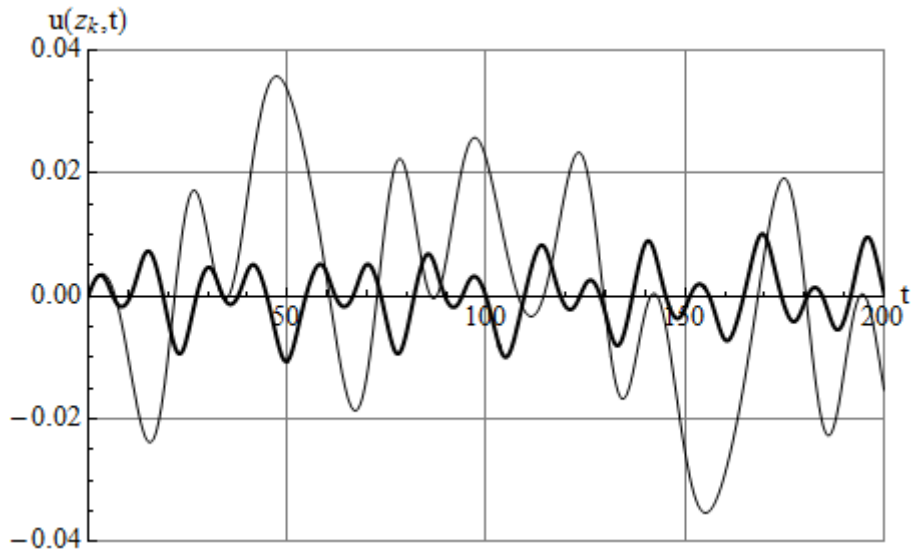


Рисунок 1 – Нелинейные (—) и линейные (—) колебания дюралюминиевой буровой штанги с учетом ее собственного веса

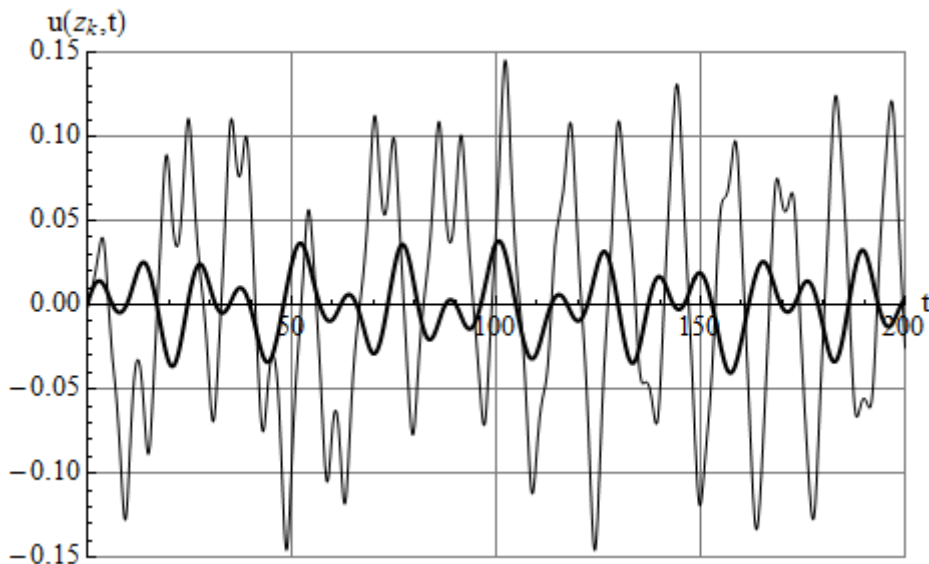
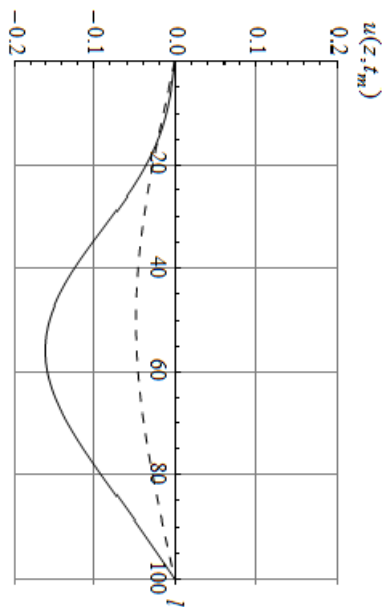


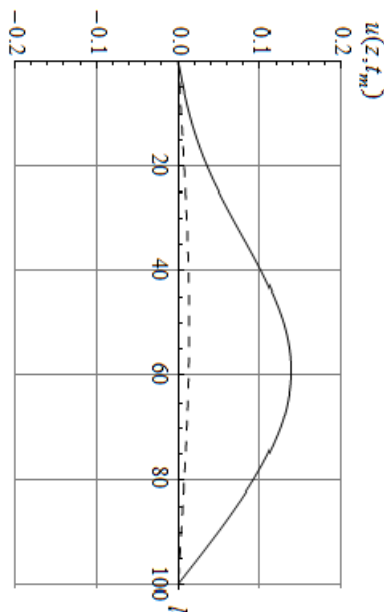
Рисунок 2 – Сравнение колебаний дюралюминиевой буровой штанги с учетом (—) и без учета (—) ее собственного веса

В этом случае система с распределенными параметрами (5), сводится к системе из 6 нелинейных уравнений относительно функций $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, $\bar{u}_3(t)$, $\bar{v}_1(t)$, $\bar{v}_2(t)$, $\bar{v}_3(t)$, анализ которых проведен на рисунках 3.

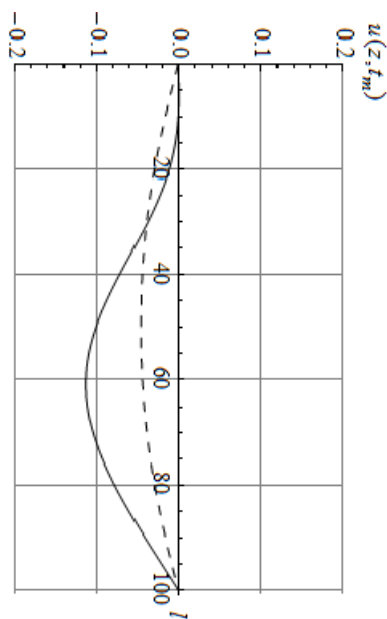
На рисунках 3 (а-г) изображены формы изгиба буровой колонны, характеризующие распределение амплитуд нелинейных поперечных колебаний буровой колонны по всей ее длине в фиксированные моменты времени для моделей с учетом и без учета собственного веса. В моделях без учета собственного веса помимо меньшей амплитуды колебаний можно заметить симметричность колебаний относительно срединного поперечного сечения. Т.е. амплитуды колебаний поперечных сечений, отступающих на одинаковое расстояние от верхнего и нижнего концов буровой штанги, одинаковы. А максимальное отклонение от недеформированного состояния достигается срединным поперечным сечением $z = \frac{1}{2}l$.



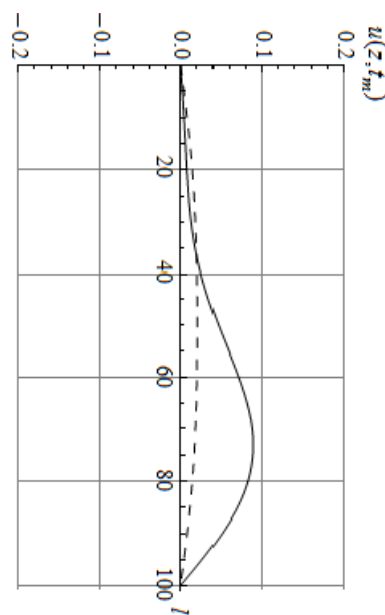
а) $t_m = 43.9c$



б) $t_m = 38.1c$



в) $t_m = 134c$



г) $t_m = 97.8c$

Рисунок 3 – Динамика упругого деформирования оси буровой колонны в плоскости Oxz с учетом (—————) и без учета (- - - - -) ее собственного веса

В моделях же с учетом собственного веса буровой колонны эта симметричность не наблюдается. Отмечается, что амплитуды колебаний нижней половины буровой колонны больше, чем у верхней половины, что обусловлено неравномерным распределением собственного веса по ее длине. Максимального значения амплитуда достигает не в середине штанги, а в сечениях, находящихся ниже центрального поперечного сечения (примерно в сечении $z = \frac{3}{5}l$). Наблюдается также заметное отличие колебаний буровой штанги у ее концов – верхнего и нижнего.

Если же у верхнего конца колебание плавно переходит в ноль (сечение $z = 0$), то у нижнего конца амплитуды намного выше и колебание резко переходит в ноль в сечении $z = l$, ввиду шарнирно-опертого конца штанги, то есть наблюдается различие градиентов изменения амплитуды. Это обусловлено тем, что с увеличением глубины скважины увеличивается и собственный вес буровой штанги. На верхнем конце колонны влияние ее собственного веса на колебания незначительно, в отличие от нижнего конца.

Далее анализируется относительное изменение амплитуд колебаний буровой штанги с учетом и без учета ее собственного веса по мере углубления скважины. Для этого находятся максимальные амплитуды колебаний двух моделей для разных поперечных сечений, и вычисляется их отношение:

$$\Delta = \frac{\text{Max}[u(z_k, t)]_{P(z_k, l)}}{\text{Max}[u(z_k, t)]}, \quad (12)$$

где $\text{Max}[u(z_k, t)]_{P(z_k, l)}$ – максимальная амплитуда колебаний буровой штанги с учетом ее собственного веса в поперечном сечении z_k , а $\text{Max}[u(z_k, t)]$ – максимальная амплитуда модели без учета собственного веса штанги. Таким образом, параметр Δ характеризует коэффициент изменения величины амплитуды колебаний при учете собственного веса штанги. В таблице рассматриваются значения параметра Δ для различных поперечных сечений.

Соотношения максимальных амплитуд колебаний буровой колонны с учетом и без учета ее собственного веса для различных поперечных сечений

z_k	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{19}{20}$
Δ	1,15	1,99	2,57	3,76	4,61	5,15

Из таблицы видно, что, ближе к забою относительное изменение амплитуд колебаний двух моделей увеличивается. Если на верхнем конце амплитуда колебаний модели с учетом собственного веса в 1,15 раз больше амплитуды колебаний без учета собственного веса, то на нижнем конце это отношение равно 5,15. Т.е. с углублением скважины влияние собственного веса буровой колонны увеличивается.

Заключение. В работе был проведен анализ нелинейной математической модели поперечных колебаний бурильной колонны, возникающих в процессе проходки скважины, с учетом собственного веса штанги. Была разработана методика расчета математической модели в среде Wolfram Mathematica, которая заключалась в сведении исходной системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем применения метода Бубнова-Галеркина и дальнейшем использовании численного метода с переключением жесткости. Установлено влияние геометрической нелинейности модели бурильной колонны, а также влияние ее собственного веса на колебательный процесс. В результате сравнительного анализа линейной и нелинейной модели выявлено уменьшение амплитуды в последнем случае. Установлено, что учет собственного веса бурильных колонн большой длины необходим для обеспечения устойчивого и надежного бурения в процессе проходки нефтяных и газовых скважин.

Работа была выполнена в рамках проекта ГФ-4 №5453 грантового финансирования Министерства образования и науки Республики Казахстан.

REFERENCES

- [1] Erofeev V.I. Nonlinear flexural and torsional waves in rods and rod systems // Bulletin of scientific and technological development. 2009. N 4(20). P. 46-50 (in Russian).
- [2] Erofeev V.I., Kazhayev V.V., Semerikova N.P. Nonlinear bending stationary waves in the Timoshenko beam // Nonlinear world. 2008. Vol. 6, N 5-6. P. 348-358 (in Russian).
- [3] Mamandi A., Kargamov M.H., Farsi S. Nonlinear vibration solution for an inclined Timoshenko beam under the action of a moving force with constant/nonconstant velocity // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 201, N 3. P. 361-383.

- [4] Asghari M., Kahrobaiyan M.H., Ahmadian M.T. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory // *International Journal of Engineering Science*. 2010. N 48. P. 1749-1761.
- [5] Li Z., Li J. Fundamental equations for dynamic analysis of rod and pipe string in oil-gas wells and application in static buckling analysis // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. 2002. Vol. 41, N 5. P. 44-53.
- [6] Mamandi A., Kargarnovin M.H. Nonlinear dynamic analysis of an inclined Timoshenko beam subjected to a moving mass/force with beam's weight included. *Shock and Vibration*. 2011. Vol. 18(6). P. 875-891.
- [7] Meirovitch L. *Principles and Techniques of Vibrations*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1997. 238 p.
- [8] Wang R.T., Chou T.H. Non-linear vibration of Timoshenko beam due to moving force and the weight of beam // *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 218(1). P. 117-131.
- [9] Xu X., Xu W., Genin J. A non-linear moving mass problem // *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol. 204(3). P. 495-504.
- [10] Naguleswaran S. Transverse vibration of an uniform Euler-Bernoulli beam under linearly varying axial force // *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 275. P. 47-57.
- [11] Hijmissen J.W., W.T. van Horssen. On transverse vibrations of a vertical Timoshenko beam // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 314. P. 161-179.
- [12] Hijmissen J.W., W.T. van Horssen. On aspect of damping for a vertical beam with a tuned mass damper at the top // *Nonlinear dynamics*. 2007. Vol. 50(1). P. 169-190.
- [13] Yokoyama T. Vibrations of a hanging Timoshenko beam under gravity // *Journal of Sound and Vibration*. 1990. Vol. 141. P. 245-258.
- [14] Abramovich H. Free vibrations of gravity loaded composite beams // *Composite Structures*. 1993. Vol. 23. P. 17-26.
- [15] Virgin L.N., Plaut R.H. Postbuckling and vibration of linearly elastic and softening columns under self-weight // *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. P. 4989-5001.
- [16] Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique // *Engineering structures*. 1995. Vol. 17 (6). P. 437-442.

А.Б. Умбеткулова, Л.А. Хаджиева

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ ӨЗ САЛМАҒЫН ЕСЕПКЕ АЛЫП
СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ТЕРБЕЛІСІН ТАЛДАУ**

Аннотация. Мұнай және газ өнеркәсібінде пайдаланылатын айналмалы терең емес бұрғылау қарнағылардың динамикасы қарастырылған. Бұрғылау қарнағының барлық ұзындығы бойынша үлестірілген өз салмағы, айнымалы қысу жүктемесі мен бұраушы кезеңнің туындаған көлденең тербелісі қарастырылған. Бұрғылау қарнағының деформация шамасы бойынша шектеулер алып тастау салдарынан моделдің геометриялық бейсызықтығы ескерілген. Қарнағының бастапқы майысу сияқты қиындататын факторлар да ескеріледі. Авторлардың ұсынған модельдері бұрғылау қарнағының белгілі тербеліс теңдеулердің қорытуы болып табылады. Сызықсыз тербеліс моделінің сандық талдауы Бубнов-Галеркин айнымалы бөлу әдісін пайдалана отырып жүзеге асырылады. Бұрғылау қарнағының тербеліс процесіне бейсызықтық пен өз салмағының әсері табылған. Бұрғылау колоннасының тербеліс амплитудасының азаюына жетекші, сызықты емес модельдердің тиімділігі растады, сондай-ақ қарнағының өз салмағы әсеріне байланысты оның тербеліс амплитудасы арттыруы көрсетілген. Бұл нәтижелер бұрғылау қарнағының жиілігі мен амплитудасы сипаттамаларын бағалағанда оларды ескеру қажеттігін көрсетеді. Зерттеу нәтижелері басқа авторлардың зерттеулерімен жақсы келісімде.

Түйін сөздер: бұрғылау қарнағы, сызықсыз модель, геометриялық бейсызықтық, үлестірілген өз салмағы, көлденең тербелісі.

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

ISSN 2518-170X (Online), ISSN 2224-5278 (Print)

<http://geolog-technical.kz/index.php/kz/>

Верстка Д. Н. Калкабековой

Подписано в печать 15.02.2017.

Формат 70x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

15,25 п.л. Тираж 300. Заказ 1.